M. ABD-LEFDIL

Université Mohammed V- Agdal **Année universitaire 06-07**
Département de Physique

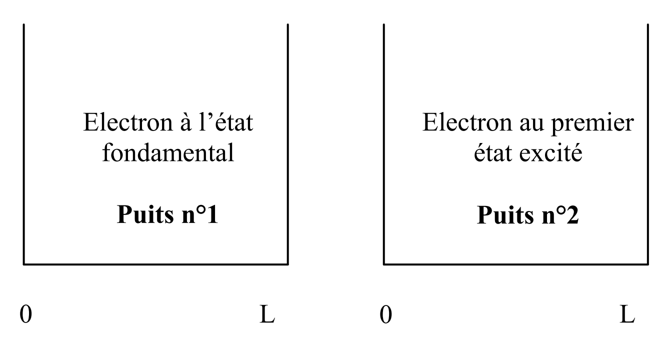
Mécanique quantique
Série n°3 SM- SMI

I- Puits de potentiel fini

Un électron est situé dans un puits de potentiel de largeur 2a, de hauteur V_0. On étudie les états liés, c'est-à-dire ceux dont l'énergie E des électrons est telle que $0<E< V_0$.

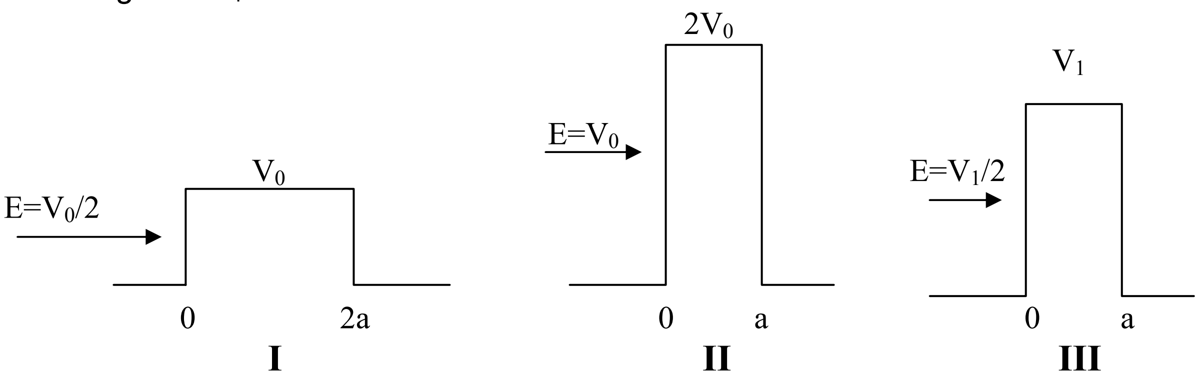
1- Déterminer la fonction d'onde $\phi(x)$ d'un électron.
2- En utilisant les conditions aux limites, déterminer les équations qui permettent le calcul des valeurs des énergies.
3- Comment peut-on résoudre ces équations?
4- Pour quelle valeur maximale de V_0 n'y a-t-il qu'un seul état possible?
5- Pour une largeur de puits égale à 5 nm, calculer, en électron-volt, la valeur maximale de V_0 ne permettant qu'un seul état. Déterminer l'écart maximal entre les deux premiers niveaux.

II- Soient deux puits de potentiel identiques l'un à coté de l'autre. Dans la boite n°1 l'électron est dans l'état fondamental, alors que dans la boite n°2 l'électron est dans le premier état excité.

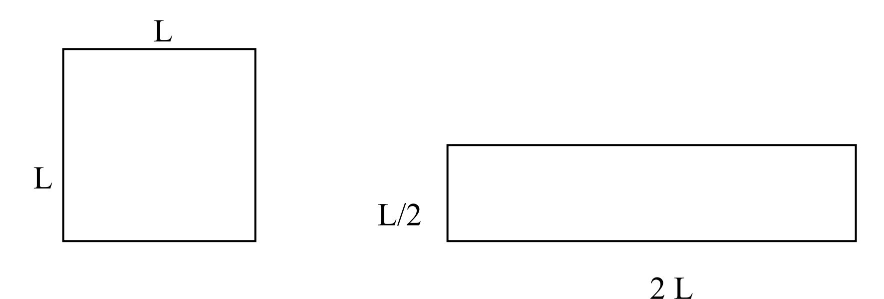


a- Quel est l'électron qui a le plus de probabilité de se trouver au centre du puits ?
b- Imaginer que vous avez effectué un nombre important de mesures de la position de l'électron pour chaque puits.
Dans le puits n°1, vous trouvez **que** 620 mesures **donnent** que l'électron est localisé à la position L/4 du mur gauche du puits.
Approximativement, combien de mesures dans le puits n°2 vous donneront la position de l'électron en L/4 du mur gauche de ce puits ? Justifier votre réponse.
c- Dans le puits n°2, l'électron fait un saut du premier état excité vers l'état fondamental et émet un photon de longueur d'onde 500 nm, calculer la largeur du puits.

III- Dans les barrières ci-dessous, l'électron incident a une énergie égale à la moitié de celle de la barrière.
La probabilité de transmission dans la barrière **I** est $T_1=10^{-10}$, et $V_0=1{,}25$ eV.
a- Chercher la probabilité de transmission T_2 dans la barrière **II**.
b- Chercher la valeur de V_1 en eV pour que la probabilité de transmission T_3 dans la barrière **III** soit égale à T_1.



IV- On considère deux boites bidimensionnelles comme le montre la figure ci-dessous. Chacune d'elle contient un électron.



a- Laquelle correspond à l'état fondamental de plus basse énergie ? Expliquer
b- Laquelle correspond au premier état excité de plus basse énergie ? Chercher le rapport des énergies des deux états excités de chacune des deux boites.
c- Si la longueur d'onde du photon émis quand l'électron passe de l'état excité à l'état fondamental dans la boite 1 est égale à 500 nm, quelle est la longueur d'onde du photon émis quand l'électron passe de l'état excité à l'état fondamental dans la boite 2 ?

V- Soit une particule de masse m en mouvement dans un potentiel défini par :

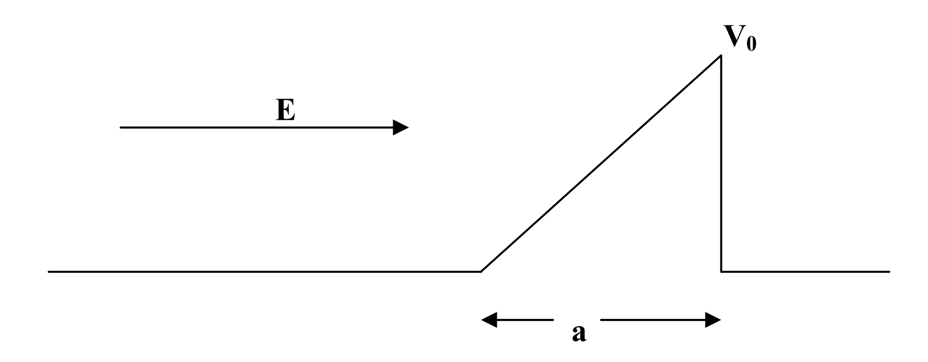
$$V(x)=\begin{cases} +\infty & \text{si } x<0 \\ -4V_0 & \text{si } \; 0<x<a \\ -V_0 & \text{si } \; a<x<3a \\ 0 & \text{si } \; x>3a \end{cases}$$

a et V_0 sont des réels positifs.
1- Donner l'allure de ce puits de potentiel.
2- A quelle condition existe-t-il un niveau d'énergie $E=-V_0$.
Illustrer votre réponse par une résolution graphique.

Exercices complémentaires :

I- Des électrons incidents d'énergie $E=V_0/2$ frappent une barrière de potentiel triangulaire de hauteur V_0=128 eV comme le montre la figure ci-dessus.

a- Chercher $I=\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{V(x)-E}$ où x_1 et x_2 sont les points classiques qui entrent dans l'expression de la probabilité de transmission. I doit être en $\sqrt{eV}\times A$



II- On considère le potentiel V(x) suivant :

$$V(x)=\begin{cases}+\infty & \text{si } x<0\\ -V_0 & \text{si } 0<x<a \ \ (\text{région } 1)\\ 0 & \text{si } x>a \ \ (\text{région } 2)\end{cases}$$

1- Représenter la courbe V(x).
On étudiera seulement les états liés pour lesquels l'énergie totale E est telle que : $-V_0<E<0$.

2- a- Déterminer l'équation de Schrödinger du système.
b- Déterminer la forme générale de la fonction d'onde, définie par partie (régions 1 et 2), sous forme d'exponentielles. On posera :

$$\rho=\sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}} \quad \text{et} \quad k=\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$$

Garder tous les coefficients sans en donner l'interprétation.

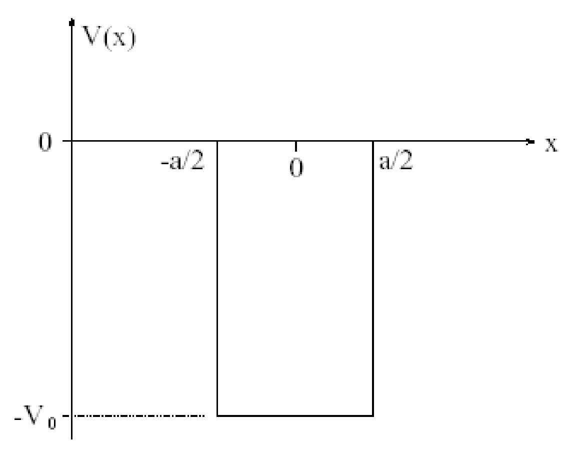
3- a- Ecrire les conditions de continuité en x=0 et en x= a.
b- En fonction du coefficient de $e^{i\rho x}$, calculer les coefficients de e^{kx} et celui de e^{-kx}.
c- Ecrire la condition limite (que l'on justifiera) sous forme d'une équation: $tg(\rho a)=F(\rho.k)$ (E_1)
d- Ecrire alors (les coefficients étant interprétés) la fonction d'onde non normée de la particule.
e- Dans $\phi_2(x)$, mettre sin (ρa) en facteur, faire apparaître tg (ρa) que l'on remplacera par sa valeur trouvée en c-.
f- Ecrire la fonction définitive non normée de $\phi(x)$.

On veut résoudre l'équation (E_1) du 3-c-. On pose : $\rho_0^2=\rho^2+k^2$
4-a- Calculer ρ_0.
b- Exprimer $|\sin(\rho a)|$ en fonction de ρ et ρ_0
c- Avec l'expression de $|\sin(\rho a)|$ et en tenant compte du signe de tg(ρa), donner une interprétation graphique des solutions de (E_1).
Ecrire une relation: $E_i=F(\rho_i, m, V_0)$ avec ρ_i une solution graphique.

III- Potentiel carré, quantification de l'énergie

Nous allons maintenant essayer de localiser une particule dans une portion de l'espace. Nous la placerons dans un potentiel négatif dans lequel elle va rester si son énergie E est négative. Pour simplifier, nous mettrons la particule dans un puits de potentiel carré.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > \frac{+a}{2} \ \text{ et } \ x < \frac{-a}{2} \\ -V_0 & \text{si} \quad \frac{-a}{2} < x < \frac{+a}{2} \end{cases}$$



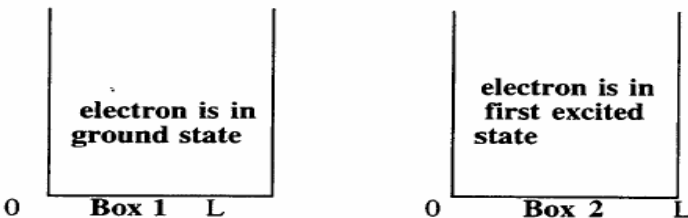
Etudier en détails la résolution de ce problème

M. ABD-LEFDIL

Quelques exercices de la série n°3 en version anglaise

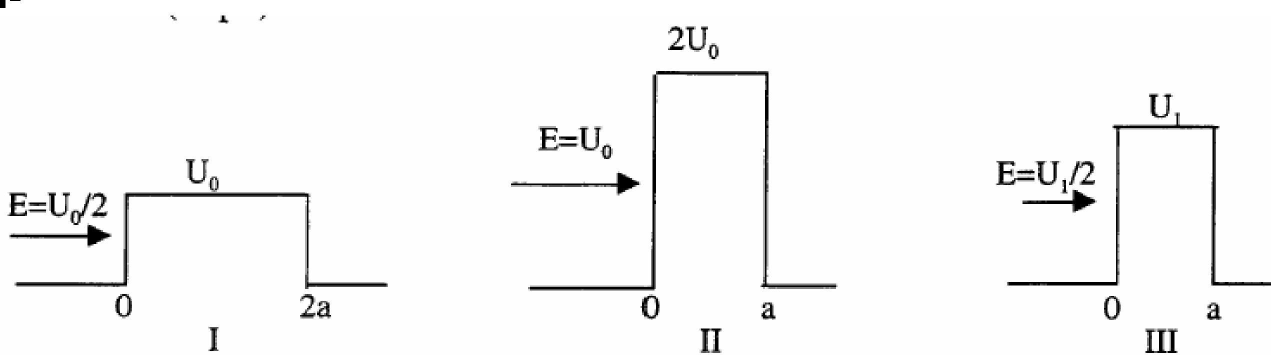
I-

There are two identical one-dimensional boxes of length L next to each other, each has one electron inside. In **box 1**, the electron is in the ground state, in **box 2**, the electron is in the first excited state.



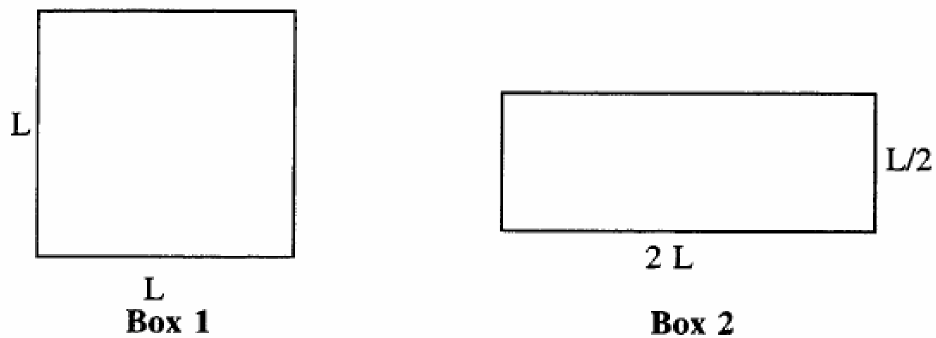
(a) Which electron is more likely to be found near the center of its box? Justify your answer.
(b) Imagine you make a large number (the same number for both boxes) of measurements of the position of the electron in each box. In box 1, you find that in 620 of the measurements the electron was located at position L/4 (relative to the left wall of the box). In approximately how many of the measurements in box 2 will you find the electron at position L/4 (relative to the left wall of that box)? Justify your answer.
(c) The electron in box 2 makes a transition from the first excited state to the ground state and emits a photon of wavelength λ=5000A. Find the length of the box, L, in A.

II-



In the three barriers shown, electrons are incident with energy **half** the barrier height. The transmission probability for barrier I is $T_I=10^{-10}$, and U_0=1.25 eV. Barrier II is twice as high as barrier I. Note that barrier I is twice as wide as the other two barriers.
(a) Find the transmission probability for barrier II, T_{II}.
(b) Find the value of U_1 (in eV) for which the transmission in barrier III is the same as that in barrier I.
Hint: It is not necessary to find the value of a.

III-



Consider the two-dimensional boxes shown, each with one electron inside. Box 1 has dimensions LxL, box 2 has dimensions (2L)x(L/2).
(a) Which has the lower ground state energy? Explain.
(b) Which has the lower first excited state energy? Find the ratio of the first excited state energy in box 2 to the first excited state energy in box 1.
(c) If the wavelength of the photon emitted when the electron goes from the first excited state to the ground state in box 1 is λ_1=5000A, what is the wavelength of the photon emitted when the electron goes from the first excited state to the ground state in box 2?